# III. országos magyar matematikaolimpia
# XXX. EMMV
**megyei szakasz, 2020. január 18.**

## VII. osztály

**1. feladat.**

a) Számítsd ki az $a = \sqrt{(2019-3^n)^2} - \sqrt{(3^n-2020)^2}$ kifejezés értékét, ahol $n \in \mathbb{N}$.

b) Határozd meg az $x$ és $y$ racionális számok értékét, ha fennáll a következő egyenlőség:

$$\sqrt{2(x+2)^2} - 3\sqrt{2} = |y+4|\sqrt{5} - |\sqrt{2}-\sqrt{5}|.$$

*Matlap*

*Megoldás.* a) Vegyük észre, hogy $a = |2019-3^n| - |3^n-2020|$. **(1 pont)**

Mivel $3^6 = 729$ és $3^7 = 2187$, így két esetet kell tárgyalnunk.

I. Ha $n \le 6$, akkor $2019-3^n > 0$ és $3^n - 2020 < 0$, így

$$a = (2019-3^n) - (-3^n+2020) = -1.$$ **(1 pont)**

II. Ha $n \ge 7$, akkor $2019-3^n < 0$ és $3^n - 2020 > 0$, így

$$a = (-2019+3^n) - (3^n-2020) = 1.$$ **(1 pont)**

b) A megadott egyenlőség a következő alakba írható:

$$\sqrt{2}|x+2| - 3\sqrt{2} = |y+4|\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{5},$$ **(1 pont)**

ahonnan

$$\sqrt{2}(|x+2|-4) = \sqrt{5}(|y+4|-1).$$ **(1 pont)**

A fenti egyenletet beszorozva $\sqrt{5}$-tel azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{10}(|x+2|-4) = 5(|y+4|-1).$$

Mivel $5(|y+4|-1) \in \mathbb{Q}$ ezért

$$|x+2| - 4 = 0,$$ **(1 pont)**

$$|y+4| - 1 = 0.$$ **(1 pont)**

Innen következik, hogy $|x+2| = 4$ és $|y+4| = 1$, ahonnan $x \in \{-6, 2\}$ és $y \in \{-5, 3\}$. **(1 pont)**

Ez alapján

$$M = \{(-6;-5), (-6;-3), (2;-5), (2;-3)\}.$$ **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

**2. feladat.** Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{5}{y+1}$, $y \neq -1$;

b) $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{5}{y+2} = 2$, $y \neq -2$.

*Simon József, Csíkszereda*

*Megoldás.* a) Mivel $y \neq -1$, az egyenletet a következő alakba írható:

$$(x+2)(y+1) = 25. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Innen több esetet kapunk, a lehetséges eseteket az alábbi táblázatba foglaltuk.

| $x+2$ | $-1$ | $-5$ | $-25$ | $25$ | $5$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y+1$ | $-25$ | $-5$ | $-1$ | $1$ | $5$ | $25$ |

(**2 pont**)

Ezek alapján

$$M = \{(-3;-26), (-7;-6), (-27;-2), (23;0), (3;4), (-1;24)\}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

b) Az egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$\frac{x+1}{3} = 2 + \frac{5}{y+2}, \quad \text{ahonnan} \quad x+1 = 6 + \frac{15}{y+2}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $x \in \mathbb{Z}$, így $(y+2) \mid 15$. (**1 pont**)

Ez alapján $y+2 \in \{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\}$, ahonnan

$$y \in \{-17, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 13\}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A lehetséges eseteket az alábbi táblázatba foglaltuk.

| $y$ | $-17$ | $-7$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $13$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $4$ | $2$ | $0$ | $-10$ | $20$ | $10$ | $8$ | $6$ |

Ezek alapján

$$M = \{(4;-17), (2;-7), (0;-5), (-10;-3), (20;-1), (10;1), (8;3), (6;13)\}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból (**1 pont**)

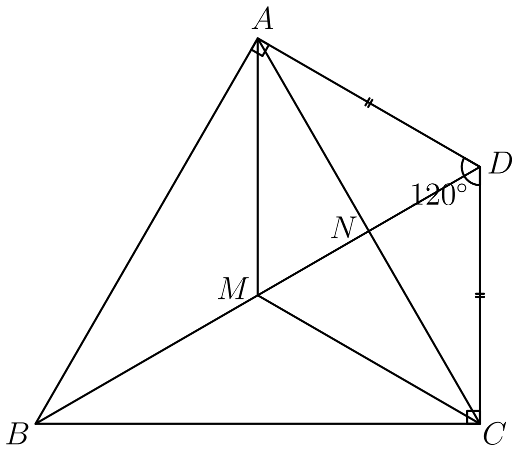
■

**3. feladat.** Az $ABCD$ négyszögben az $A$ és $C$ szögek derékszögek, a $D$ szög mértéke $120°$, valamint $AD = DC$. Számítsd ki az $ABC$ háromszög területét, ha az $ADC$ háromszög területe $15\ \text{cm}^2$.

*Zajzon Csaba, Barót*

*Megoldás.* Mivel a $DAC$ háromszög egyenlő szárú és $\widehat{ADC} = 120°$, ezért

$$\widehat{DAC} = \widehat{DCA} = 30°. \qquad \textbf{(1 pont)}$$




Ugyanakkor $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 90° - 30° = 60°$, vagyis az $ABC$ háromszög egyenlő oldalú. (**1 pont**)
A $BA = BC$ és $DA = DC$ összefüggésekből következik, hogy $BD$ az $AC$ szakasz felezőmerőlegese.

(**1 pont**)

Legyen $BD \cap AC = \{N\}$. A $DAC$ háromszögben $DN$ magasság és szögfelező, ezért $\widehat{ADB} = 60°$.

(**1 pont**)

Legyen $M$ a $BD$ szakasz felezőpontja. Az $AM = MD$ és $\widehat{ADM} = 60°$ összefüggések alapján következik, hogy az $AMD$ háromszög egyenlő oldalú. (**1 pont**)
Az $AMD$ háromszögben $AN$ oldalfelező, tehát $MN = ND$. Ugyanakkor az $AN = NC$ és $AC \perp MD$ összefüggések is teljesülnek, tehát az $AMCD$ négyszög rombusz. (**1 pont**)
Mivel $MN = \frac{BN}{3}$, ezért $T_{AMC} = \frac{1}{3} T_{ABC}$. (**1 pont**)
Mivel $AMC_\Delta \equiv ADC_\Delta$, ezért $T_{AMC} = T_{ADC} = 15\text{ cm}^2$. (**1 pont**)
Innen következik, hogy $T_{ABC} = 3T_{AMC} = 3 \cdot 15\text{ cm}^2 = 45\text{ cm}^2$. (**1 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

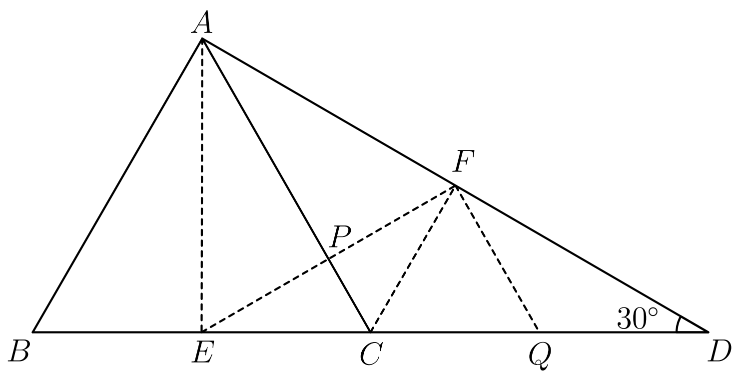
■

**4. feladat.** Az $ABC$ háromszögben $AB = AC$, $D$ a $B$ pontból kiinduló $BC$ félegyenesnek egy olyan pontja, amelyre $CD = BC$ ($D \neq B$), és tudjuk, hogy $\widehat{ADB} = 30°$. Legyen $E$ és $Q$ rendre a $BC$ és $CD$ szakasz felezőpontja, az $F$ pont a $C$ pontból az $AD$ egyenesre húzott merőleges talppontja, $P$ pedig az $AC$ és $EF$ egyenesek metszéspontja. Igazold, hogy:

a) $AB \perp AD$;
b) $AEB_\Delta \equiv EFQ_\Delta$;
c) $T_{AEP} = T_{CPFQ}$.

*Simon József, Csíkszereda*

*Megoldás.* A megoldáshoz tekintsük az alábbi ábrát.




a) A $CFD$ derékszögű háromszögben $\widehat{D} = 30°$, ezért $CF = \frac{CD}{2} = EC$. **(1 pont)**

Teljesül, hogy $AEC_\Delta \equiv AFC_\Delta$, mert $AC$ közös és $EC = CF$. Innen azt kapjuk, hogy $\widehat{CAE} \equiv \widehat{CAF}$. **(1 pont)**

Legyen $\widehat{CAE} = \widehat{CAF} = u$. Ekkor

$$\widehat{ACE} = \widehat{CDA} + \widehat{CAD} = 30° + u$$
$$\widehat{ACE} = 90° - \widehat{EAC} = 90° - u.$$ **(1 pont)**

Innen következik, hogy $30° + u = 90° - u$, ahonnan $u = 30°$. Teljesül továbbá, hogy $\widehat{BAD} = 3u = 90°$, vagyis $AB \perp AD$. **(1 pont)**

b) Mivel $AB \perp AD$ és $CF \perp AD$, ezért $CF \parallel AB$, így $CF$ az $ADB$ háromszögben középvonal.

**(1 pont)**

Az is teljesül hogy $\widehat{BAC} = 60°$, így az $ABC$ háromszög egyenlő oldalú, és innen $AB = EQ$. A $CF = \frac{AB}{2}$ összefüggés alapján következik, hogy $CF = \frac{EQ}{2}$, tehát az $EFQ$ háromszög $F$-ben derékszögű. **(1 pont)**

A $BE = FQ$ és $AE = EQ$ összefüggésekből következik, hogy $AEB_\Delta \equiv EFQ_\Delta$ (átfogó-befogó eset). **(1 pont)**

c) Mivel $AEC_\Delta \equiv EFQ_\Delta$, így $T_{AEC} = T_{EFQ}$. **(1 pont)**

Viszont $T_{AEC} - T_{EPC} = T_{EFQ} - T_{EPC}$, ahonnan $T_{AEP} = T_{CPFQ}$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■